ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
Ενδεικτικές απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

Α2. α. Ψ β. Παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλά όχι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 73

Α4. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

Θέμα Β

Β1.
Είναι $D_{f\circ g}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$

Πρέπει $x\neq 1$ και $g(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x}>0 \Leftrightarrow x(1-x)>0 \Leftrightarrow x(x-1)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln g(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right), D_{f\circ g}=(0,1)$

Β2.
Είναι
$\forall x\in(0,1)$ με

$$h(x_1)=h(x_2)\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)=\ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)\Leftrightarrow \frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2}{1-x_2}\Leftrightarrow x_1(1-x_2)=x_2(1-x_1)$$

$\Leftrightarrow x_1-x_1x_2=x_2-x_1x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

Άρα h 1-1 οπότε υπάρχει αντίστροφη

$$h(x)=y\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=y\Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=e^y\Leftrightarrow$$

$$x=(1-x)e^y \Leftrightarrow x+xe^y=e^y \Leftrightarrow x=\frac{e^y}{e^y+1}, e^y+1>0, \forall y\in R$$

Ισχύει $0<x<1\Leftrightarrow 0<\dfrac{e^y}{e^y+1}<1\Leftrightarrow 0<e^y<e^y+1\Leftrightarrow \begin{cases} 0<e^y \\ e^y<e^y+1\Leftrightarrow 0<1\end{cases}$ για κάθε $y\in R$ οπότε $h(A)=R=D_{h^{-1}}$

οπότε $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}, x\in R$

B3.

$\phi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}, x\in R$

$$\phi'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{(e^x)'(e^x+1)-e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

Είναι $e^x>0, x\in R, (e^x+1)^2>0, x\in R$ οπότε $\phi'(x)>0, x\in R$ δηλαδή η φ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το R και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

$$\phi''(x)=\left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\frac{(e^x)'(e^x+1)^2-e^x((e^x+1)^2)'}{(e^x+1)^4}=$$
$$=\frac{e^x(e^x+1)^2-2e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

$\phi''(x)=0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x)=0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$\phi''(x)>0 \Leftrightarrow 1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$

$\phi''(x)<0 \Leftrightarrow 1-e^x<0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ΄΄(x)	+	0	-
φ(x)	κυρτή	$\frac{1}{2}$	κοίλη

Σημείο καμπής για x=0 το $A(0,\frac{1}{2})$, $\phi(0)=\dfrac{e^0}{e^0+1}=\dfrac{1}{2}$

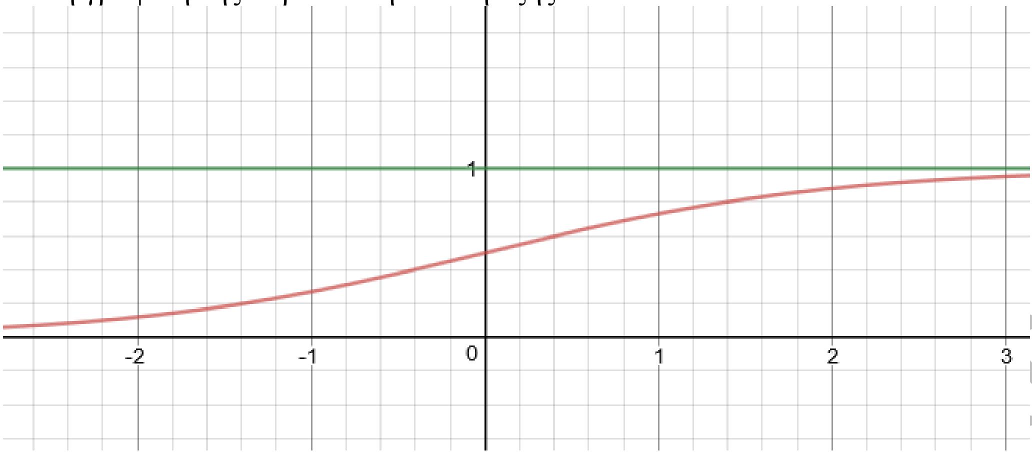
B4.
Για την φ(x) είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\phi(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}==\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{1}{1+0}=1$$

Οπότε η γραφική παράσταση της φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την y=0 και στο $+\infty$ την y=1

Και η γραφική της παράσταση είναι η εξής:



Θέμα Γ

Γ1. Έστω $\text{M}(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής με την C_f

Η εφαπτομένη είναι της μορφής $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$f'(x)=(-\eta\mu x)'=-\sigma\upsilon\nu x$ και $\text{A}\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\alpha\nu\acute{\eta}\kappa\varepsilon\iota$ (ε) οπότε προκύπτει:

$$-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0(\frac{\pi}{2}-x_0)\Leftrightarrow \eta\mu x_0+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x_0-x_0\sigma\upsilon\nu x_0-\frac{\pi}{2}=0$$

Έστω συνάρτηση $\phi(x)=\eta\mu x+\dfrac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x-x\sigma\upsilon\nu x-\dfrac{\pi}{2}$

Είναι

$$\phi(0)=\eta\mu 0+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu 0-0\sigma\upsilon\nu 0-\frac{\pi}{2}=0+\frac{\pi}{2}-0-\frac{\pi}{2}=0$$

$$\phi(\pi)=\eta\mu\pi+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\pi-\pi\sigma\upsilon\nu\pi-\frac{\pi}{2}=0-\frac{\pi}{2}+\pi-\frac{\pi}{2}=0$$

και

$$\phi'(x)=(\eta\mu x+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x-x\sigma\upsilon\nu x-\frac{\pi}{2})'=$$

$$=\sigma\upsilon\nu x-\frac{\pi}{2}\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x=(x-\frac{\pi}{2})\eta\mu x$$

$$\phi'(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x(x-\frac{\pi}{2})=0\overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x=0 \text{ ή } x=\frac{\pi}{2} \text{ ή } x=\pi$$

$$\phi'(x)>0\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{2}>0\Leftrightarrow x>\frac{\pi}{2}$$

$$\phi'(x)<0\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{2}<0\Leftrightarrow x<\frac{\pi}{2},$$

$\forall x\in(0,\pi)$, ημx>0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
φ΄(x)	0	-	0	+	0
φ(x)	0	↘	$1-\frac{\pi}{2}$	↗	0

$$\phi(\frac{\pi}{2})=\eta\mu\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}<0$$

Η φ στο $\frac{\pi}{2}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο , οπότε $\phi(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ και οι $x=0, x=\pi$ είναι οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης $\phi(x)=0$

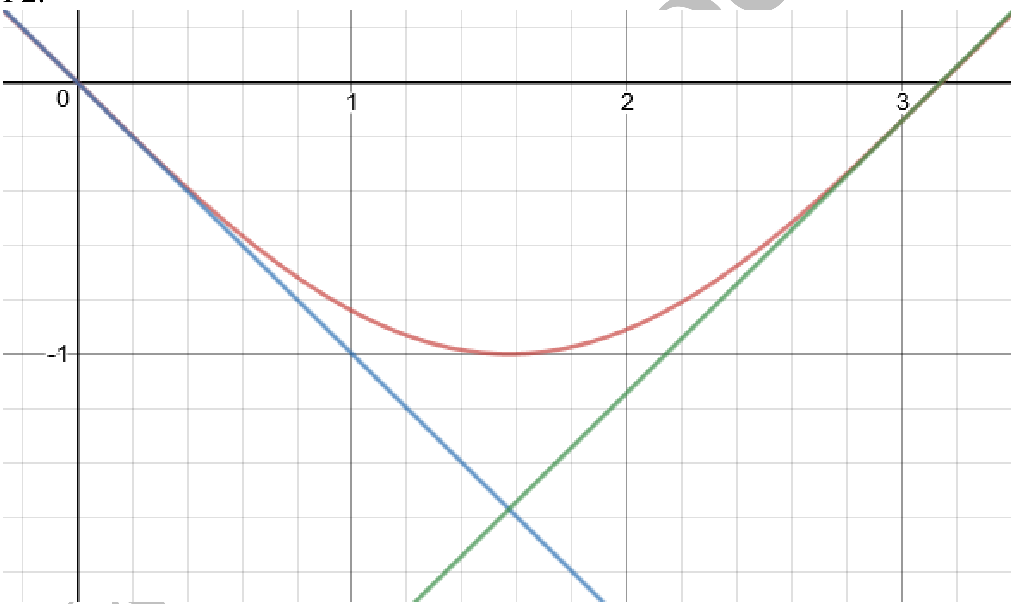
Άρα για x=0 είναι

$(\varepsilon_1): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-\eta\mu 0=-x\sigma\upsilon\nu 0\Leftrightarrow y=-x$

και για x=π είναι

$(\varepsilon_2): y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)\Leftrightarrow y-\eta\mu\pi=-\sigma\upsilon\nu\pi(x-\pi)\Leftrightarrow y=x-\pi$

Γ2.



Η C_f τέμνει τον x΄x στα σημεία O(0,0) και B(π,0)

Είναι

$$\text{E}_2=\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\pi}|-\eta\mu x|dx\underset{\eta\mu x\geq 0}{\overset{x\in[0,\pi]}{=}}\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=$$

$$=-(\sigma\upsilon\nu\pi-\sigma\upsilon\nu 0)=-(-1-1)=2$$

$$\text{E}_1=(\text{O}\overset{\Delta}{\text{A}}\text{B})-\text{E}_2=\frac{1}{2}\pi\frac{\pi}{2}-2=\frac{\pi^2}{4}-2$$

Οπότε $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$

Γ3.

Είναι $\lim\limits_{x\to\pi}(f(x)+x) = -\eta\mu\pi + \pi = \pi$
$\lim\limits_{x\to\pi}(f(x)-x+\pi) = -\eta\mu\pi - \pi + \pi = 0$

και $f(x) > x-\pi \Leftrightarrow f(x)-x+\pi > 0$ άρα $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = +\infty$

αφού $f''(x) = \eta\mu x > 0, x\in(0,\pi) \Rightarrow f$ κυρτή [0,π]
άρα $f(x) \geq x-\pi \Leftrightarrow f(x)-x+\pi \geq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής x=π

Γ4.
Στο [1,e] ισχύει
$f(x) > x-\pi \Leftrightarrow$
$\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}, \quad x > 1 > 0, \alpha\rho\alpha$
$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e dx - \pi\int_1^e \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > [x]_1^e - \pi[\ln x]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi(\ln e - 1) \Leftrightarrow$
$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi$

<u>**Θέμα Δ**</u>

Δ1.
Αν $x\in[-1,0)$ ή $x\in(0,\pi]$ η f είναι συνεχής σαν αποτέλεσμα πράξεων με συνεχείς συναρτήσεις

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = e^0\eta\mu 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$$ οπότε η f είναι συνεχής και για x=0 δηλαδή είναι συνεχής στο διάστημα [-1,π]

Για $x\in[-1,0)$ είναι $f'(x) = (\sqrt[3]{x^4})' = \left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)' \overset{x<0}{=} \left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x} < 0$

Για $x \in (0,\pi]$ είναι

$$f'(x) = (e^x \eta\mu x)' = e^x \eta\mu x + e^x \sigma\upsilon\nu x = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \overset{\sigma\upsilon\nu x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1$$

$\Leftrightarrow \varepsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$ κρισιμο σημειο

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)\sqrt[3]{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}(-\sqrt[3]{-x}) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x \eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^+}(e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x}) = e^0 \cdot 1 = 1$$

Συνεπώς αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x=0 το οποίο είναι κρίσιμο σημείο.

Δ2.

Για $x \in [-1,0)$ η $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη

Για $x \in (0,\pi]$ είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \overset{\sigma\upsilon\nu x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1$$

$\Leftrightarrow \varepsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$

x	0	$\frac{3\pi}{4}$		π
Επιλεγμένο x_0	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$g(x_0) = \eta\mu x_0 + \sigma\upsilon\nu x_0$	1	0	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	
$g(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$	+	0	-	

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$		-					
$e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$				+		-	
f′		-		+		-	
f		↘		↗		↘	
	TM		TE		TM		TE

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

- στο x=-1 το $f(-1)=\sqrt[3]{(-1)^4}=1$ και
- στο $x=\frac{3\pi}{4}$ το $f(\frac{3\pi}{4})=e^{\frac{3\pi}{4}}\eta\mu\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$,

τοπικό ελάχιστο

- στο x=0 το f(0)=0 και
- στο π, το f(π)=0.

Οπότε $f(A)=[0,1]\cup[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}]=[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}]$

Δ3.

Ισχύει $e^{5x}>e^x>e^x\eta\mu x$, αφού $0<\eta\mu x<1,\ \forall x\in(0,\pi)$

Οπότε

$$\mathrm{E}=\int_0^{\pi}|e^{5x}-e^x\eta\mu x|\,dx=\int_0^{\pi}(e^{5x}-e^x\eta\mu x)dx=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}e^{5x}\eta\mu x dx=I_1-I_2$$

$$I_1=\int_0^{\pi}e^{5x}dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}=\frac{e^{5\pi}-1}{5}$$

$$\mathrm{I}_2=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=\int_0^{\pi}(e^x)'\eta\mu x dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=$$

$$=-\int_0^{\pi}(e^x)'\sigma\upsilon\nu x dx=-(\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x(-\eta\mu x)dx)=$$

$$=e^{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi-1-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=-e^{\pi}-1-\mathrm{I}_2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\mathrm{I}_2=-e^{\pi}-1\Leftrightarrow\mathrm{I}_2=\frac{-e^{\pi}-1}{2}$$

Άρα $\mathrm{E}=\frac{e^{5\pi}-1}{5}+\frac{e^{\pi}+1}{2}$

Δ4.

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$f(x)-\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow$$

$$f(x)-\left(\frac{4x-3\pi}{4}\right)^2=f(\frac{3\pi}{4})\Leftrightarrow$$

$$f(x)-f(\frac{3\pi}{4})=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2$$

Φανερά $x=\frac{3\pi}{4}$ ρίζα της

Από το (Δ2) είναι $f(x)\le f(\frac{3\pi}{4}), x\in[-1,\pi]$ αφού η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=\frac{3\pi}{4}$, οπότε $f(x)-f(\frac{3\pi}{4})\le 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$ και $\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\ge 0, \forall x\in R$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$

Άρα $f(x)-f(\frac{3\pi}{4})=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2$ αδύνατη αν $x\ne\frac{3\pi}{4}$

Άρα μοναδική ρίζα $x=\frac{3\pi}{4}$

Επιμέλεια λύσεων
Μιχάλης Γράβας
Ηλίας Πίτης