ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-2016 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη σελ262 σχολικού βιβλίου

Α2. σελ141 σχολικού βιβλίου

Α3. σελ246 σχολικού βιβλίου

Α4. Λ Σ Λ Σ Σ

Θέμα Β

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}, D_f=R$$

Β1.

Είναι $f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2)'(x^2+1)-x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+1)-x^2 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
f΄	- 0 +
f	↘ 0 ↗

Η f έχει ολικό ελάχιστο στο x=0 το f(0)=0

Β2.

Είναι

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)'=\frac{(2x)'(x^2+1)^2-2x((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2+1)^2-2x2(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)^2-2x2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=$$

$$\frac{2(x^2+1)(x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad +\infty$
f΄΄(x)	- 0 + 0 -
f(x)	$\cap$ ΣΚ $\cup$ ΣΚ $\cap$

Σημεία Καμπής για $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ τα σημεία $A(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}), B(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4})$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\frac{1}{4} \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\frac{1}{4}$$

B3.
Δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού Df=R

Για την πλάγια στο $+\infty$, είναι

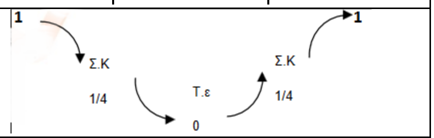
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=0$$

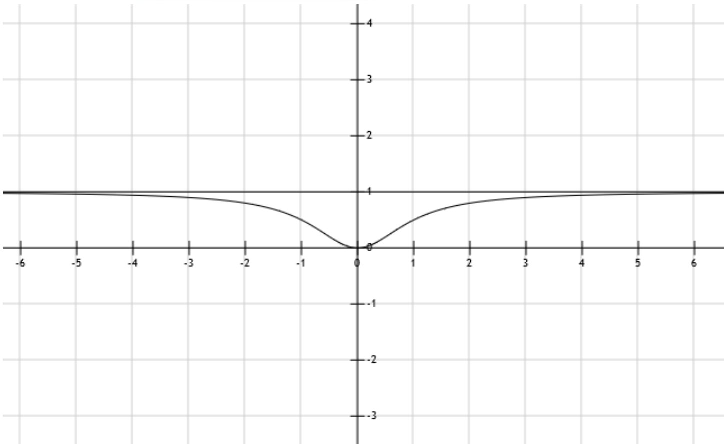
Οπότε λ=0 και

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Συνεπώς η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία y=1.
Ομοίως προκύπτει και στο $-\infty$, οριζόντια ασύμπτωτη η ευθεία y=1.

B4.

x	$-\infty \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad +\infty$
f΄΄	- 0 + | + 0 -
f΄	- | - 0 + | +
f	



<u>Θέμα Γ</u>

Γ1.

Θέτω $\omega = x^2 \geq 0$, οπότε η σχέση γίνεται $e^{\omega} - \omega - 1 = 0$ και έστω συνάρτηση $f(\omega) = e^{\omega} - \omega - 1$ με $f(0) = 0$ και $f'(\omega) = e^{\omega} - 1 > 0, \omega > 0$

$f'(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$

ω		0	+∞
f΄			+
f		0	↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο ω=0 το f(0)=0 άρα $f(\omega) \geq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $\omega = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Γ2.

Έστω $g(x)=e^{x^2}-x^2-1$, είναι $f^2(x)=g^2(x)$

Για την f(x) ισχύει ότι f(0)=0 και $f(x)\neq 0$, για $x\neq 0$ άρα η f διατηρεί πρόσημο στα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$. Προκύπτουν οι περιπτώσεις:

Αν x>0		Αν x<0	
Και f(x)>0	Και f(x)<0	Και f(x)>0	Και f(x)<0
f(x)=g(x)	-f(x)=g(x)	f(x)=g(x)	-f(x)=g(x)

Επιπλέον f(0)=0=g(0)

Άρα f(x)=g(x), $x\leq 0$, f(x)=-g(x), $x\leq 0$, f(x)=g(x), $x\geq 0$, f(x)=-g(x), $x\geq 0$,

Τελικά από συνδυασμό των παραπάνω έχουμε

f(x) = g(x), $x\in R$ ή f(x)=-g(x) $x\in R$ ή

$$f(x)=\begin{cases}-g(x), & x<0\\ g(x), & x\geq 0\end{cases}\quad ή$$

$$f(x)=\begin{cases}g(x), & x<0\\ -g(x), & x\geq 0\end{cases}$$

Γ3.

$$f'(x)=(e^{x^2}-x^2-1)'=e^{x^2}2x-2x$$

$$f''(x)=(e^{x^2}2x)'-(2x)'=2xe^{x^2}2x+2e^{x^2}-2=4x^2e^{x^2}+(2e^{x^2}-2)$$

Είναι $4x^2e^{x^2}\geq 0, x\in R$

Για $x>0\Rightarrow x^2>0\Rightarrow e^{x^2}>1\Rightarrow 2e^{x^2}>2\Rightarrow 2e^{x^2}-2>0$

και $x<0\Rightarrow x^2>0\Rightarrow e^{x^2}>1\Rightarrow 2e^{x^2}>2\Rightarrow 2e^{x^2}-2>0$

και $f''(0)=0$

άρα σε κάθε περίπτωση $f''(x)\geq 0$ και f΄΄ συνεχής , οπότε η f είναι κυρτή R.

Γ4.

Έστω $g(x)=f(x+3)-f(x)$

Είναι $g'(x)=f'(x+3)-f'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)\Rightarrow g$ 1-1

αφού f κυρτή $f'\nearrow[0,+\infty)$ και x+3>x $\Rightarrow f'(x+3)>f'(x)$

Οπότε

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)\Leftrightarrow$$

$$g(|\eta\mu x|)=g(x)\overset{g1-1}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|=x\Leftrightarrow x=0$$

$\forall x\in R, |\eta\mu x|\leq|x|=x, x\geq 0\,\mu\varepsilon\;\;\tau o$ ισον να ισχυει οταν x=0

Θέμα Δ

Δ1.

$$\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)(\eta\mu x)' dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx-\left(\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)(\sigma\upsilon\nu x)' dx\right)=\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx-\left(\left[f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi-f(0)\sigma\upsilon\nu 0\right]-\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx\right)=\pi \Leftrightarrow$$

$$f(\pi)+f(0)=\pi \Leftrightarrow$$

$$f(\pi)=\pi$$

Αφού:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1 \quad \text{για}$$

$$\phi(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x\phi(x)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\eta\mu x\phi(x))=0\cdot 1=0=f(0)$$

αφού η f είναι συνεχής σαν παραγωγίσιμη άρα f(0)=0

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}}=f'(0)=1$$

αφού $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

Δ2.

α) αφού f παραγωγίσιμη, Παραγωγίζοντας κατά μέλη τη σχέση

$e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ είναι:

$e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'(f(x)) f'(x) + e^x$

Αν η f παρουσιάζει τοπ.ακρότατο για x= x_0 τότε σαν παραγωγίσιμη από Θ.Fermat είναι $f'(x_0) = 0$, οπότε για x=x_0 η παραπάνω σχέση δίνει

$e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$

Δηλαδή $f'(0) = 0 \neq 1$ που είναι άτοπο και συνεπώς η f δεν έχει ακρότατα στο R

β) Είναι $f'(x) \neq 0$ και f΄ συνεχής αφού f 2 φορές παραγωγίσιμη ,οπότε η f΄ διατηρεί πρόσημο. Και $f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3.

Έστω $g(x) = \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$, είναι

$$|g(x)| = \left|\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| \leq \frac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{2}{|f(x)|} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2|f(x)|} \leq g(x) \leq \frac{1}{2|f(x)|}$$

Και από Δ2β η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Δ4.

(Ά τρόπος)

$$1 \leq x \leq e^{\pi} \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e^{\pi} \Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq \pi \overset{f \nearrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(0) \leq f(\ln x) \leq f(\pi)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(\ln x) \leq \pi \Leftrightarrow \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 \leq \frac{f(\ln x)}{x} \leq \frac{\pi}{x}$$

$\varepsilon\tau\sigma\iota\ 0 \leq \dfrac{f(\ln x)}{x}$ και οχι παντού μηδέν στο $[1,e^{\pi}]$ αρα $0 < \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx$

$\dfrac{f(\ln x)}{x} \leq \dfrac{\pi}{x} \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{\pi}{x} - \dfrac{f(\ln x)}{x}$ και οχι παντού μηδέν στο $[1,e^{\pi}]$ αρα $0 < \pi \displaystyle\int_1^{e^{\pi}} \frac{dx}{x} - \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx \Leftrightarrow$

$$0 < \pi[\ln x]_1^{e^{\pi}} - \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx$$

$$0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi[\ln x]_1^{e^\pi}\Leftrightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi(\ln e^\pi-\ln 1)\Leftrightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$$

(΄Β τρόπος)

Θέτω $u=\ln x=g(x)$,Οπότε $\begin{matrix} g(1)=\ln 1=0 \\ g(e^\pi)=\ln e^\pi=\pi \end{matrix}$ και $du=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx$

$$\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^\pi f(u)du$$

$$0\le x\le\pi \overset{f\nearrow\mathbb{R}}{\Rightarrow} f(0)\le f(x)\le f(\pi)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le\pi$$

ετσι $0\le f(x)$ και οχι παντου μηδέν στο $[0,\pi]\Rightarrow 0<\int_0^\pi f(x)dx$ και

$f(x)\le\pi\Leftrightarrow\pi-f(x)\ge 0$ και οχι παντού μηδέν στο $[0,\pi]\Rightarrow 0<\pi\int_0^\pi dx-\int_0^\pi f(x)dx\Leftrightarrow\int_0^\pi f(x)dx<\pi\int_0^\pi dx$

αρα

$$0<\int_0^\pi f(x)dx<\pi\int_0^\pi dx\Leftrightarrow 0<\int_0^\pi f(x)dx<\pi[x]_0^\pi\Leftrightarrow 0<\int_0^\pi f(x)dx<\pi^2$$

Επιμέλεια:
Μιχάλης Γράβας
Πίτης Ηλίας