



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

Ενδεικτικές απαντήσεις

Θέμα Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

A2. α. Ψ β. Παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αλλά όχι παραγωγίσιμη σε αυτό.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 73

A4. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

Θέμα Β

B1.

Είναι $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$

Πρέπει $x \neq 1$ και $g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln g(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), D_{f \circ g} = (0,1)$

B2.

Είναι

$\forall x \in (0,1)$ με

$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right) \Leftrightarrow \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Leftrightarrow x_1(1-x_2) = x_2(1-x_1)$

$\Leftrightarrow x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άρα h 1-1 οπότε υπάρχει αντίστροφη

$h(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow$

$x = (1-x)e^y \Leftrightarrow x + xe^y = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y + 1}, e^y + 1 > 0, \forall y \in \mathbb{R}$

Ισχύει $0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{e^y}{e^y + 1} < 1 \Leftrightarrow 0 < e^y < e^y + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < e^y \\ e^y < e^y + 1 \Leftrightarrow 0 < 1 \end{cases}$ για κάθε

$y \in \mathbb{R}$ οπότε $h(A) = \mathbb{R} = D_{h^{-1}}$



οπότε $h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, x \in R$

B3.

$$\phi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, x \in R$$

$$\phi'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right)' = \frac{(e^x)'(e^x + 1) - e^x(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Είναι $e^x > 0, x \in R, (e^x + 1)^2 > 0, x \in R$ οπότε $\phi'(x) > 0, x \in R$ δηλαδή η ϕ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το R και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= \left(\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \right)' = \frac{(e^x)'(e^x + 1)^2 - e^x((e^x + 1)^2)'}{(e^x + 1)^4} = \\ &= \frac{e^x(e^x + 1)^2 - 2e^{2x}(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} \end{aligned}$$

$$\phi''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1 - e^x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\phi''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

$$\phi''(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\phi''(x)$		+	-
$\phi(x)$		κυρτή	κοίλη

Σημείο καμπής για $x=0$ το $A(0, \frac{1}{2})$, $\phi(0) = \frac{e^0}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$

B4.

Για την $\phi(x)$ είναι:

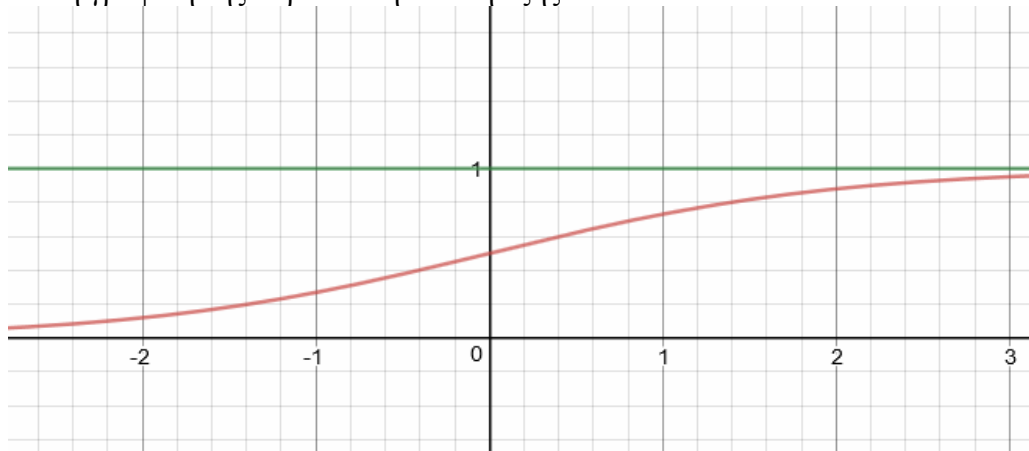
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

Οπότε η γραφική παράσταση της ϕ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y=0$ και στο $+\infty$ την $y=1$



Και η γραφική της παράσταση είναι η εξής:



Θέμα Γ

Γ1. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής με την C_f

Η εφαπτομένη είναι της μορφής $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$f'(x) = (-\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$ και $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ ανήκει (ε) οπότε προκύπτει:

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow \eta\mu x_0 + \frac{\pi}{2} \sigma\upsilon\nu x_0 - x_0 \sigma\upsilon\nu x_0 - \frac{\pi}{2} = 0$$

Έστω συνάρτηση $\phi(x) = \eta\mu x + \frac{\pi}{2} \sigma\upsilon\nu x - x \sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2}$

$$\phi(0) = \eta\mu 0 + \frac{\pi}{2} \sigma\upsilon\nu 0 - 0 \sigma\upsilon\nu 0 - \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{2} = 0$$

Είναι

$$\phi(\pi) = \eta\mu \pi + \frac{\pi}{2} \sigma\upsilon\nu \pi - \pi \sigma\upsilon\nu \pi - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} = 0$$

και

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= (\eta\mu x + \frac{\pi}{2} \sigma\upsilon\nu x - x \sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2})' = \\ &= \sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2} \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + x \eta\mu x = (x - \frac{\pi}{2}) \eta\mu x \end{aligned}$$

$$\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x (x - \frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow \overset{x \in [0, \pi]}{x = 0} \text{ ή } x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \pi$$

$$\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{2}$$

$$\phi'(x) < 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} < 0 \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{2},$$

$$\forall x \in (0, \pi), \eta\mu x > 0$$



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\varphi'(x)$	0	-	0
$\varphi(x)$	0	$\searrow 1 - \frac{\pi}{2}$	$\nearrow 0$

$$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

Η φ στο $\frac{\pi}{2}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, οπότε $\phi(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ και οι $x = 0, x = \pi$ είναι οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης $\phi(x) = 0$

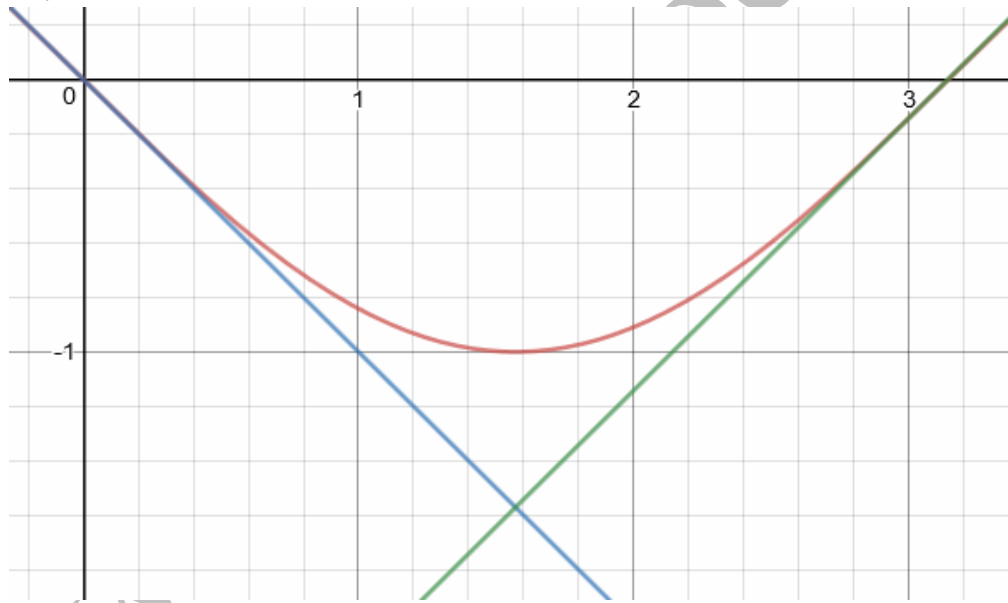
Άρα για $x=0$ είναι

$$(\varepsilon_1): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - \eta\mu 0 = -x\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow y = -x$$

και για $x=\pi$ είναι

$$(\varepsilon_2): y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi) \Leftrightarrow y - \eta\mu\pi = -\sigma\upsilon\nu\pi(x - \pi) \Leftrightarrow y = x - \pi$$

Γ2.



Η C_f τέμνει τον x' στα σημεία $O(0,0)$ και $B(\pi,0)$

Είναι

$$E_2 = \int_0^\pi |f(x)| dx = \int_0^\pi |-\eta\mu x| dx \stackrel{x \in [0, \pi]}{\eta\mu x \geq 0} = \int_0^\pi \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = -(\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0) = -(-1 - 1) = 2$$

$$E_1 = (\triangle OAB) - E_2 = \frac{1}{2} \pi \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$$



$$\text{Οπότε } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} (f(x) + x) &= -\eta\mu\pi + \pi = \pi \\ \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow \pi} (f(x) - x + \pi) &= -\eta\mu\pi - \pi + \pi = 0 \end{aligned}$$

$$\text{και } f(x) > x - \pi \Leftrightarrow f(x) - x + \pi > 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = +\infty$$

αφού $f''(x) = \eta\mu x > 0, x \in (0, \pi) \Rightarrow f$ κυρτή $[0, \pi]$

άρα $f(x) \geq x - \pi \Leftrightarrow f(x) - x + \pi \geq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής $x = \pi$

Γ4.

Στο $[1, e]$ ισχύει

$$f(x) > x - \pi \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}, \quad x > 1 > 0, \text{ άρα}$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e dx - \pi \int_1^e \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > [x]_1^e - \pi [\ln x]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi(\ln e - 1) \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$$

Θέμα Δ

Δ1.

Αν $x \in [-1, 0)$ ή $x \in (0, \pi]$ η f είναι συνεχής σαν αποτέλεσμα πράξεων με συνεχείς συναρτήσεις

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= f(0) = e^0 \eta\mu 0 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ οπότε η } f \text{ είναι}$$

συνεχής και για $x=0$ δηλαδή είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$

$$\text{Για } x \in [-1, 0) \text{ είναι } f'(x) = (\sqrt[3]{x^4})' = \left(|x|^{\frac{4}{3}} \right)' \stackrel{x < 0}{=} \left((-x)^{\frac{4}{3}} \right)' = \frac{4}{3} (-x)^{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{3} \sqrt{-x}$$

$$\text{Για } x \in (0, \pi] \text{ είναι } f'(x) = (e^x \eta\mu x)' = e^x \eta\mu x + e^x \sigma\upsilon\nu x = e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)\sqrt[3]{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt[3]{-x}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \cdot \frac{\eta \mu x}{x}) = e^0 \cdot 1 = 1$$

Συνεπώς αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ το οποίο είναι κρίσιμο σημείο.

Δ2.

Για $x \in [-1, 0)$ η $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη

Για $x \in (0, \pi]$ είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x) = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x = -\sigma \upsilon \nu x \Leftrightarrow \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x} = -1$$

$$\Leftrightarrow \epsilon \phi x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
Επιλεγμένο x_0	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$
$g(x_0) = \eta \mu x_0 + \sigma \upsilon \nu x_0$	1	0	$\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$
$g(x) = \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x$	+	0	-

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$-\frac{4}{3}\sqrt{-x}$	-		////////////////////	
$e^x(\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)$	//////		+ 0	-
f(x)	\		/	

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=-1$ το $f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^4} = 1$, τοπικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$ και τοπικό μέγιστο στο $x = \frac{3\pi}{4}$ το $f(\frac{3\pi}{4}) = e^{\frac{3\pi}{4}} \eta \mu \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$ και είναι $f(\pi)=0$.



Οπότε $f(A) = [0,1] \cup [0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}] = [0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}]$

Δ3.

Ισχύει $e^{5x} > e^x > e^x \eta \mu x$, αφού $0 < \eta \mu x < 1, \forall x \in (0, \pi)$

Οπότε

$$E = \int_0^{\pi} |e^{5x} - e^x \eta \mu x| dx = \int_0^{\pi} (e^{5x} - e^x \eta \mu x) dx = \int_0^{\pi} e^{5x} dx - \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{5x} dx = \left[\frac{e^{5x}}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{e^{5\pi} - 1}{5}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx = \int_0^{\pi} (e^x)' \eta \mu x dx = \left[e^x \eta \mu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sigma \upsilon \nu x dx =$$

$$= - \int_0^{\pi} (e^x)' \sigma \upsilon \nu x dx = - \left(\left[e^x \sigma \upsilon \nu x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x (-\eta \mu x) dx \right) =$$

$$= e^{\pi} \sigma \upsilon \nu \pi - 1 - \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx = -e^{\pi} - 1 - I_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2I_2 = -e^{\pi} - 1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{-e^{\pi} - 1}{2}$$

Άρα $E = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} + \frac{e^{\pi} + 1}{2}$

Δ4.

$$16e^{\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \left(\frac{4x - 3\pi}{4} \right)^2 = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)^2$$

Φανερά $x = \frac{3\pi}{4}$ ρίζα της



Από το (Δ2) είναι $f(x) \leq f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $x \in [-1, \pi]$ αφού η f παρουσιάζει μέγιστο στο

$x = \frac{3\pi}{4}$, οπότε $f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \leq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$ και

$$\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ με το ίσον να ισχύει μόνο για } x = \frac{3\pi}{4}$$

Άρα $f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2$ αδύνατη αν $x \neq \frac{3\pi}{4}$

Άρα μοναδική ρίζα $x = \frac{3\pi}{4}$

Επιμέλεια λύσεων
Μιχάλης Γράβας
Ηλίας Πίτης