ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ -ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2018

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

Α2. α)Ψ

β) Παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$

είναι 1-1 αφου κάθε παραλληλη ευθεια στον χχ΄ τεμνει την c_f το πολύ σε ένα σημειο, όμως f όχι γνησια μονοτονη στο πεδιο ορισμου της αφου είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 216

Α4.

α) Λάθος, β) Λάθος, γ) Σωστό, δ) Σωστό, ε) Σωστό

-

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

$$f(x)=x-\frac{4}{x^2},\ x\in R*$$

$$f'(x)=(x-\frac{4}{x^2})'=1+\frac{8x}{x^4}=\frac{x^4+8x}{x^4}=\frac{x(x^3+8)}{x^4}=\frac{x(x+2)(x^2+2x+4)}{x^4}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		+	0	-	‖	+	
	$-\infty$	↗	-3 TM	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ το f(-2)=-3

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x - \frac{4}{x^2}) = -\infty$ (1)

Αρα x=0 κατακόρυφη ασυμπτωτη

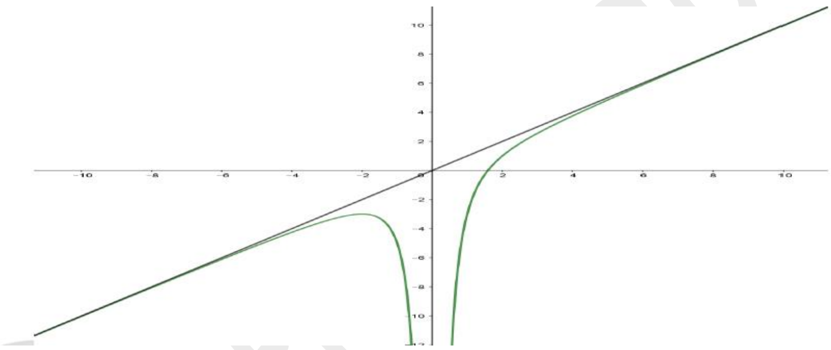
$y = x$ πλαγια ασυμπτωτη της c_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$ αφού

$\lim_{x\to +\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{4}{x^2} = 0$

Οριζόντιες δεν υπάρχουν

$f''(x) = (1 + \frac{8x}{x^4})' = (1 + \frac{8}{x^3})' = -\frac{24}{x^2} < 0, x \neq 0$ αρα f κοιλη στα $(-\infty, 0), (0, +\infty)$.

Σημεια καμπής δεν υπάρχουν



Θέμα Γ

Γ1.Η περίμετρος του τετραγώνου είναι 4α=xm , οπότε η πλευρά είναι α=$\frac{x}{4}$ m

Το μήκος του κύκλου είναι 8-xm οπότε

$L(x) = 2\pi r(x) \Leftrightarrow 8 - x = 2\pi r(x) \Leftrightarrow r(x) = \frac{8-x}{2\pi}$, όπου L(x) η συνάρτηση μήκους του κύκλου και r(x) η συνάρτηση της ακτίνας του κύκλου.

Οπότε το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_T(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16} m^2$

και του κύκλου $E_K(x)=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\frac{(8-x)^2}{4\pi}m^2$

Το συνολικό εμβαδόν είναι

$$E(x)=E_T(x)+E_K(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},x\in(0,8)$$

Γ2.

$$E'(x)=\frac{1}{16\pi}((\pi+4)x^2-64x+256)'=\frac{1}{16\pi}(2(\pi+4)x-64)$$

$$E'(x)=0\Leftrightarrow 2(\pi+4)x-64=0\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}\in(0,8)$$

x	0	$\frac{32}{\pi+4}$		8
E	-	0	+	
E	Γν.φθινουσα	ΤΕ	γν.αυξουσα	

Τοπικο ελάχιστο για $x=\frac{32}{\pi+4}\in(0,8)$ τοE($\frac{32}{\pi+4}$)= $\frac{16}{\pi+4}$

Τοτε α= $\frac{8}{\pi+4}$ οποτε $2\rho=\alpha\Leftrightarrow\frac{8-x}{\pi}=\frac{8}{\pi+4}\Leftrightarrow 8\pi+32-(\pi+4)x=8\pi\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$

Που συμβαινει όταν Ε γινεται ελαχιστο

Γ3. $E(x)=5\Leftrightarrow E(x)-5=0$,Αν $g(x)=E(x)-5$

g συνεχής $[0,\frac{32}{\pi+4}]$,πολυωνυμικη

$g(0)=E(0)-5=\frac{16}{\pi}-5>0$,

$g(\frac{32}{\pi+4})=E(\frac{32}{\pi+4})-5=\frac{16}{\pi+4}-5<0$

Ετσι $g(\frac{32}{\pi+4})g(0)<0$ και από Θ.Bolzano

υπαρχει ενας τουλαχιστον $\xi\in(0,\frac{32}{\pi+4}):g(\xi)=0$.

$g'(x)=E'(x)<0, x\in(0,\frac{32}{\pi+4})\Rightarrow g$ γνησια φθινουσα αρα ξ μοναδικος

Φανερα $g(8)=4-5=-1$ και 0 δεν ανηκει στο συνολο τιμων της g,

$[g(\frac{32}{\pi+4}),g(8)]$ αφου είναι g γνησια αυξουσα στο $[\frac{32}{\pi+4},8]$,

$g'(x)=E'(x)>0, x\in(\frac{32}{\pi+4},8)$.

Αρα ξ μοναδικός στο (0,8),g(ξ)=0.

Θέμα Δ

Δ1.

Η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-a}-x^2, x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη.

$$f'(x)=\left(2e^{x-a}-x^2\right)'=2e^{x-a}(x-a)'-2x=2e^{x-a}-2x$$
$$f''(x)=\left(2e^{x-a}-2x\right)'=2e^{x-a}-2=2(e^{x-a}-1)$$

Είναι

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x-a}-2=0\Leftrightarrow e^{x-a}=1\Leftrightarrow e^{x-a}=e^0\Leftrightarrow x-a=0\Leftrightarrow x=a$$
$$f''(x)>0\Leftrightarrow 2e^{x-a}-2>0\Leftrightarrow e^{x-a}>1\Leftrightarrow e^{x-a}>e^0\Leftrightarrow x-a>0\Leftrightarrow x>a$$
$$f''(x)<0\Leftrightarrow 2e^{x-a}-2<0\Leftrightarrow e^{x-a}<1\Leftrightarrow e^{x-a}<e^0\Leftrightarrow x-a<0\Leftrightarrow x<a$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f΄΄	-	0	+
f	Κοίλη	Σ.Κ.	Κυρτή

Άρα η παρουσιάζει Σημείο Καμπής στο x=α, $f(a)=2-a^2$, το σημείο $\mathrm{A}(\alpha,2-\alpha^2)$

Δ2.

Από το πρόσημο της f΄΄(x) (Δ1) προκύπτει πως

$f'\searrow(-\infty,a),\ f'\nearrow(a,+\infty)$

Ακόμα $f'(a)=2(1-a)<0$ για α>1 και η f΄ παρουσιάζει ελάχιστο στο x=α.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{x-a}-2x)=+\infty$,είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-\alpha}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{x-a}-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^{x-a}(1-\frac{x}{e^{x-a}}))=+\infty$

αφού, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{x-a}=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-a}} \underset{De\ \text{L'Hospital}}{\overset{\lim\limits_{x\to+\infty} x=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-a}=+\infty}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^{x-a})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-a}}=0$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f΄΄		-	0	+	
f	$+\infty$	$\searrow$	$2(1-\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Αν x<α , $f'(A) \overset{f'\searrow}{=} (2(1-a),+\infty)$ και $0 \in (2(1-a),+\infty)$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (-\infty,a): f'(x_1)=0$ και η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα άρα το x_1 είναι μοναδικό.

Όμοια αν x>α , $f'(A) \overset{f'\nearrow}{=} (2(1-a),+\infty)$ και $0 \in (2(1-a),+\infty)$, οπότε υπάρχει $x_2 \in (a,+\infty): f'(x_2)=0$ και η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα άρα το x_2 είναι μοναδικό.

$$x < x_1 < a \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$x_1 < x < a \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x_1) > f'(x) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$a < x < x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$a < x_2 < x \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x_2) < f'(x) \Rightarrow f'(x) > 0$$

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
f'		+	0	-			0	+	
f		↗	TM	↘			TE	↗	

Δ3.

$f'(1) = 2(e^{1-a}-1) < 0$, αφου 1-α<0 $\Rightarrow e^{1-a} < 1$

$f'(x) < 0, \forall x \in (x_1,x_2)$ αρα $1 \in (x_1,x_2)$

ετσι $1<α<x<x_2 \underset{f\searrow}{\Rightarrow} f(1) > f(a) > f(x) > f(x_2)$ $\alpha\rho\alpha$ $f(x) = f(1)$ αδυνατη στο $(α,x_2)$

Δ4.

Για α=2 είναι $f(x)=2e^{x-2}-x^2, \quad f'(x)=2e^{x-2}-2x$, οπότε
$f(2)=2e^0-4=-2, \; f'(2)=2e^0-2=-2$

Η εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο $\mathrm{A}(2,f(2))=A(2-2)$ είναι η

$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+2$

Επειδή η f είναι κυρτή στο διάστημα $(2,+\infty)$ η γραφική της παράσταση είναι πάνω από την εφαπτομένη εκτός του σημείου επαφής. Δηλαδή

$$f(x)\geq -2x+2 \underset{x\in[2,3]}{\overset{\sqrt{x-2}\geq 0}{\Leftrightarrow}} f(x)\sqrt{x-2}\geq(-2x+2)\sqrt{x-2}$$

Με την ισότητα να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής A(2,-2).

Έστω $h(x)=f(x)\sqrt{x-2}, \quad g(x)=(-2x+2)\sqrt{x-2}$, είναι συνεχείς στο διάστημα [2,3] ως πράξεις συνεχών και επειδή δεν είναι παντού μηδέν, είναι

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}dx$$

Θέτω $g(x)=u=\sqrt{x-2}\Leftrightarrow x-2=u^2\Leftrightarrow x=u^2+2$, οπότε $dx=2udu$

$g(2)=0=u_1, g(3)=1=u_2$

$$\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}dx=\int_0^1(-2u^2-2)u2udu=\int_0^1(-4u^4-4u^2)du=$$

$$=-4\left[\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right]_0^1=-\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=-\frac{32}{15}$$

Άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>-\frac{32}{15}$

Επιμελεια λυσεων

Μιχάλης Γράβας

Ηλιας Πίτης