ΑΝΟΔΟΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ενδεικτικές απαντήσεις Μαθηματικα Προσανατολισμού 2019

Θεμα Α

α. Α1 α.θεωρια σχ.βιβλιο σελ15
β. i.Σελ35 ,ii.σελ35-36

Α2 σελ.142

Α3σελ135

Α4

α. Λάθος $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$

β. Λάθος $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$

Α5.γ

Θεμα Β

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=2 \Leftrightarrow \lambda=2$,αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x})=0$

$f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0 \Leftrightarrow e^{-x}-x+2=0$

Αν $g(x)=e^{-x}-x+2$,g συνεχής [2,3] σαν αποτελεσμα πραξεων με συνεχείς συναρτησεων

$g(2)=e^{-2}>0$, $g(3)=e^{-3}-1<0$ οποτε $g(2)g(3)<0$ και από Θ.Bolzano υπάρχει ενας τουλαχιστον $\rho\in(2,3): g(\rho)=0$

$g'(x)=-e^{-x}-1<0$ αρα g γνησια φθινουσα στο R και η ριζα μοναδική

Β3. $f'(x)=-e^{-x}<0$ αρα f γνησια φθινουσα στο R και ετσι και 1-1.αρα υπαρχει η αντίστροφη της f.

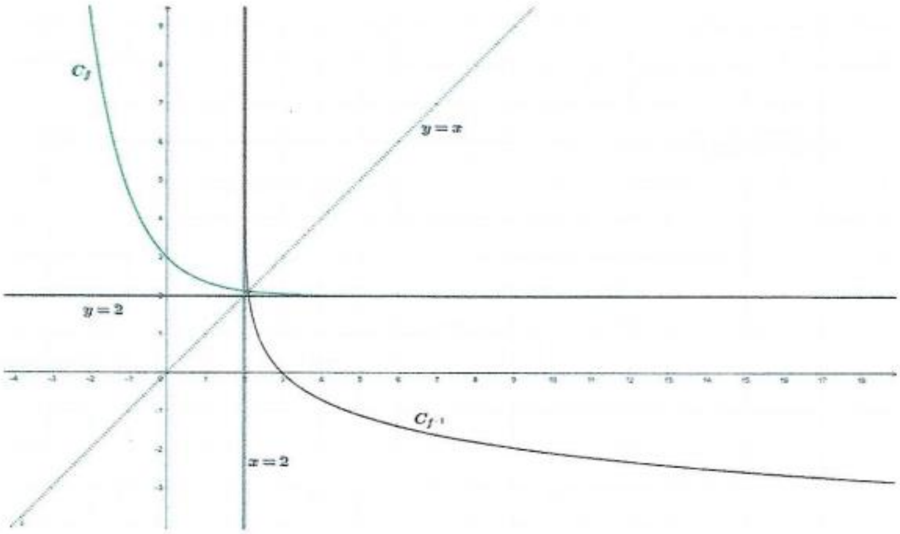
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ αρα $f(A)=(2,+\infty)=D_{f^{-1}}$

$y=f(x) \Leftrightarrow y=e^{-x}+2 \Leftrightarrow y-2=e^{-x} \Leftrightarrow x=-\ln(y-2)=f^{-1}(y), y\in(2,+\infty)$

Β4. $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(-\ln(x-2)=+\infty$ αφού αν

$u=x-2, \lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0 \Rightarrow \lim\limits_{u\to0^+}(-\ln u)=+\infty$ αρα χ=2 κατακορυφη ασυμπτωτη της cf^{-1}

ΑΝΟΔΟΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ



Θεμα Γ

Γ1

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha & ,x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x & ,x<1 \end{cases}$$

Αφου f παραγωγίσιμη είναι και συνεχής αρα συνεχής και στο 1 οποτε

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+\alpha\right) \Leftrightarrow 1+\beta=1+\alpha \Leftrightarrow \alpha=\beta$$

Ετσι $f(x)\overset{\alpha=\beta}{=}\begin{cases} x^2+\alpha & ,x\geq 1 \\ e^{x-1}+\alpha x & ,x<1 \end{cases}$

Και f παργωγίσιμη στο1 οποτε $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\in R$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\alpha-\alpha-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha x-\alpha-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha x-\alpha-1}{x-1}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{(e^{x-1}+\alpha x-\alpha-1)'}{(x-1)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha}{1}=1+\alpha$$

$$1+\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=1=\beta$$

Γ2

$f'(x)=2x, x>1$

$f'(x)=(e^{x-1}+x)'=e^{x-1}+1, x<1$

x	-∞	0	1	+∞
2x			+	
$e^{x-1}+1$	+	+		
f′	+	+	+	
f	↗	↗	↗	

f γνησια αυξουσα σε ολο το R αφού είναι συνεχής στο 1

Γ3i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$, αφου $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-1}e^{x}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\right)=-\infty$

$f(0)=e^{-1}=\frac{1}{e}>0$ αφου f γνησια αυξουσα ,αν x<0,f(A)= $(-\infty,\frac{1}{e})$ που περιέχει το 0,

Αρα υπάρχει $x_0<0:f(x_0)=0$ μοναδικός αφου επιπλεον f γνησια αυξουσα R.

Γ3ii. $f^2(x)-x_0f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)(f(x)-x_0)=0$

$x_0<x\overset{f\nearrow}{\Longrightarrow}f(x_0)=0<f(x)$
$x_0<0<f(x)\Rightarrow f(x)-x_0>0, x>1$

αρα η εξισωση είναι αδυνατη οταν $x\in(x_0,+\infty)$.

Γ4. $1<x\overset{f\nearrow}{\Longrightarrow}0<f(x)\Rightarrow f(x(t))>0, x(t)>0$

$f(x)=x^2+1, x>1$ αρα $E(t)=\frac{1}{2}x(t)f(x(t))=\frac{1}{2}x(t)(x^2(t)+1)=\frac{1}{2}(x^3(t)+x(t))$

$E'(t)=\frac{1}{2}(x^3(t)+x(t))'=\frac{3}{2}x^2(t)x'(t)+\frac{1}{2}x'(t)$ για $t=t_0$

$E'(t_0)=\frac{3}{2}x^2(t_0)x'(t_0)+\frac{1}{2}x'(t_0)$, $x'(t_0)=2\mu o\nu/\sec,\ x(t_0)=3$

$E'(t_0)=\frac{3}{2}2\cdot 9+\frac{1}{2}2=28\mu o\nu.\varepsilon\mu\beta/\sec$

www.fr-anodos.gr

Θεμα Δ

Δ1. f παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=((x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)+\alpha x+\beta)'=$$

$$=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\left(x-1\right)\cdot\frac{1}{x^2-2x+2}(x^2-2x+2)'+\alpha=$$

$$=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\left(x-1\right)\cdot\frac{1}{x^2-2x+2}(2x-2)+\alpha=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}+\alpha$$

Αφου η ευθεία $\left(\varepsilon\right)$: $y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A\left(1,1\right)$, $f'(1)=-1\Leftrightarrow\alpha=-1$ και

$$f(1)=-1+2=1\Leftrightarrow\alpha+\beta=1\overset{\alpha=-1}{\Longleftrightarrow}-1+\beta=1\Leftrightarrow\beta=2$$

Δ2. Ετσι $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$

$$f\left(x\right)=\left(x-1\right)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2\Leftrightarrow f(x)+x-2=\left(x-1\right)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)$$

$$E=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left|f(x)+x-2\right|dx=\int_1^2\left|\left(x-1\right)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)\right|dx=$$

$=\int_1^2\left(x-1\right)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$ αφου $x-1>0, x>1$ και

$$x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1\geq 1\Rightarrow\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0, x\geq 1$$

$$E=\int_1^2\left(x-1\right)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 2\left(x-1\right)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_1^2\left(2x-2\right)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^2-2x+2\right)'\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x^2-2x+2\right)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^2-2x+2\right)\frac{1}{x^2-2x+2}(2x-2)dx=$$

$$=\frac{1}{2}2\ln 2-\frac{1}{2}\left[x^2-2x\right]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}$$

Β τρόπος

θετω u= x^2-2x+2 =g(x) , $g(1)=1, g(2)=2, du=(2x-2)dx\Rightarrow(x-1)dx=\frac{1}{2}du$

$$E=\frac{1}{2}\int_1^2\ln u du=\frac{1}{2}\int_1^{2u}u'\ln u du=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 du=\frac{1}{2}(2\ln 2)-\frac{1}{2}=\ln 2-\frac{1}{2}$$

www.fr-anodos.gr

Δ3i. $x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1\geq 1 \Rightarrow \ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0, x\geq 1$

$\dfrac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}\geq 0, x\in R$

$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}-1 \Leftrightarrow f'(x)+1=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$
$f'(x)+1\geq 0 \Leftrightarrow f'(x)\geq -1, x\in R$

Δ3ii.

$f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda\geq\left(\lambda-1\right)\cdot\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda\geq f(\lambda)+\lambda-2+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow$
$f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda+\dfrac{1}{2}\geq f(\lambda)+\lambda \quad (1)$

Ατρόπος

Αν $g(x)=f(x)+x$ τότε $g'(x)=f'(x)+1\geq 0 \Rightarrow g\nearrow R$

$\lambda+\dfrac{1}{2}>\lambda \overset{g\nearrow R}{\Longrightarrow} g(\lambda+\dfrac{1}{2})>g(\lambda)\Rightarrow f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda+\dfrac{1}{2}\succ f(\lambda)+\lambda$

Βτρόπος

$f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq -\dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \dfrac{f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\dfrac{1}{2}}\geq -1$

και ΘΜΤ για f στο $\left[\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right]$ αφού f παραγωγίσιμη στο R αρα υπαρχει

$(\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}):f'(\xi)=\dfrac{f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\dfrac{1}{2}}\geq -1$ από Δ3i

Δ4. $g(x)=-x+2\Leftrightarrow -x^3-x+2=-x+2\Leftrightarrow x^3=0\Leftrightarrow x=0$

Αρα η εφαπτομενη της c_f στο A(1,1) εχει κοινό σημείο με την c_g το (0,2)
$g'\left(x\right)=(-x^3-x+2)'=-3x^2-1$

$g(0)=2, g'(0)=-1$ και η εφαπτομενη της στο B(0,2) είναι η y=-x+2 που είναι μια κοινη εφαπτομένη τους και επειδή $g'(x)=(-x^3-x+2)'=-3x^2-1\leq -1$ με το ισον να ισχύει μόνο για x=0 ενώ $f'(x)\geq -1$ με το ισον να ισχύει μονο στο x=1 δεν υπάρχει άλλη κοινή εφαπτομένη.

Επιμέλεια λύσεων :

Μιχάλης Γράβας

Βιβή Καράτζια

www.fr-anodos.gr